Adı Soyadı: 19.01.2023

Numarası:

2022-2023 GÜZ DÖNEMİ CEBİR I FİNAL SINAVI SORULARI

1) a)

$$x \equiv 3\ (mod\ 5)$$
$$x \equiv\ 4(mod\ 7)$$
$$x \equiv 2\ (mod\ 11)$$

kongrüans sisteminin çözümü varsa bulunuz.

b) $a+b=251$ ve $(a,b)=4$ özelliğine sahip (a,b) tam sayı çifti bulunabilir mi? Araştırınız.

2) a) G bir grup $N \lhd G$ olsun. Her $aN, bN \in G/_N$ için $(aN)(bN) = (ab)N$ olduğunu gösteriniz.

b) G bir grup $N \leq G$ olsun. H'ın elemanlarıyla G içindeki sol kalan sınıfları arasında birebir eşleme olduğunu gösteriniz.

3) G ve H iki grup $f\colon G \to H$ bir grup epimorfizması olsun.

$$G/_{Çekf} \cong H$$

olduğunu gösteriniz.

4) a) Z_{10}^{*} grubu veriliyor.

$$f\colon\ Z_{10}^{*} \times Z_{10}^{*} \to Z_{10}^{*}$$
$$(\bar{a},\bar{b}) \to f(\bar{a},\bar{b}) = \bar{a}.\bar{b}$$

ile tanımlı f dönüşümünün bir grup homomorfizması olduğunu gösteriniz. [illegible]

b) Devirli grubu tarif ediniz. Ayrıca Z_{18}^{*} grubun devirli olup olmadığını araştırınız.

5) a) $G = Z_{20}$ grubunun $H_1 =< \bar{4} >$ ve $H_2 =< \bar{5} >$ alt grupları veriliyor. $G = H_1 \oplus H_2$ midir? Araştırınız.

b) $G = Z_2 \times Z_4$ grubunda $H =< (\bar{0},\bar{3}) >$ alt grubu veriliyor. $G/_H$ bölüm grubunu bulunuz.

BAŞARILAR

Prof. Dr. Şenol EREN

Cebir I Final Cevap Anahtarı

1- a) $x \equiv 3 \pmod 5$ $\quad (5,7)=(5,11)=(7,11)=1$

$x \equiv 4 \pmod 7$ $\quad$ Çözüm var

$x \equiv 2 \pmod{11}$

$a_1 = 3 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 2 \qquad 77 b_1 \equiv 1 \pmod 5$

$M_1 = 77 \quad M_2 = 55 \quad M_3 = 35 \qquad 55 b_2 \equiv 1 \pmod 7$

$b_1 = 3 \quad b_2 = 6 \quad b_3 = 6 \qquad 35 b_3 \equiv 1 \pmod{11}$

$\bar{x} = 693 + 1320 + 420 = 2433 \qquad \bar{x} = \overline{123} \pmod{385}$

b) $(a,b) = 4 \Rightarrow a = 4a_1,\ b = 4b_1,\ \exists a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$

$a + b = 4a_1 + 4b_1 = 4(a_1 + b_1) = 251$ olsa $4 \nmid 251$

bulunamaz.

2- a) Defterinizde mevcut

b) " "

3- Defterinizde mevcut

4- a) $\mathbb{Z}_{10}^{*} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$

$\forall (\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_{10}^{*} \times \mathbb{Z}_{10}^{*}$ için $f(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}.\bar{b} \in \mathbb{Z}_{10}^{*}$ kapalı

$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{c}, \bar{d}) \Rightarrow \bar{a}.\bar{b} = \bar{c}.\bar{d}$ olup iyi tanımlı

$\forall (\bar{a}, \bar{b}), (\bar{c}, \bar{d}) \in \mathbb{Z}_{10}^{*} \times \mathbb{Z}_{10}^{*}$ için

$$f[(\bar{a}, \bar{b}).(\bar{c}, \bar{d})] = f(\bar{a}.\bar{c}, \bar{b}.\bar{d}) = \bar{a}.\bar{c}.\bar{b}.\bar{d} = (\bar{a}.\bar{b})(\bar{c}.\bar{d}) = f(\bar{a}, \bar{b}).f(\bar{c}, \bar{d})$$

$Görf = \mathbb{Z}_{10}^{*} \qquad Çekf = \{(\bar{a}, \bar{b}) \mid f(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{1}\}$

$Çekf = \{(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{7}), (\bar{9}, \bar{9}), (\bar{7}, \bar{3})\}$

b-) G bir grup olsun. $a \in G$ için $o(a) = |G|$ olan bir eleman varsa G'ye devirli grup denir.

$\mathbb{Z}_{18}^{*} = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}\}$

$\alpha = \bar{5}$ için bakalım.

$5^1 = \bar{5}$

$5^2 = \bar{7}$

$5^3 = \overline{17}$

$5^4 = \overline{13}$

$5^5 = \overline{11}$

$5^6 = \bar{1}$

o halde $\mathbb{Z}_{18}^{*} = \langle \bar{5} \rangle$ olup devirlidir.

5. a) $H_1 = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \bar{0}\}$

$H_2 = \langle \bar{5} \rangle = \{\bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \bar{0}\}$

$G = H_1 + H_2$ ve $H_1 \cap H_2 = \{\bar{0}\}$ olup $\mathbb{Z}_{20} = H_1 \oplus H_2$ dir.

b) $H = \{(\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{0})\}$

$G/H = \{H, (\bar{1}, \bar{0}) + H\}$ bulunur.

$(\bar{1}, \bar{0}) + H = (\bar{1}, \bar{1}) + H = (\bar{1}, \bar{2}) + H = (\bar{1}, \bar{3}) + H$

$= \{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{3})\}$

bulunur.